Краткие сообщения ОИЯИ N6-85 JINR Rapid Communications N6-85
УДК 530.145

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Г.Н.Афанасьев

Показано, что выполнения следующих трех условий еще не достаточно для существования эффекта Ааронова-Бома: 1/ многосвязности пространства, в котором происходит рассеяние частиц; 2/ наличия в этом многосвязном пространстве нетривиального /т.е. отличного от нуля/ безвихревого векторного магнитного потенциала; 3/ однозначности используемых волновых функций. Именно дан контрпример, когда в одном и том же многосвязном пространстве, при отличном от нуля векторном магнитном потенциале и однозначных волновых функциях, возможны конфигурации магнитного поля, отвечающие как наличию, так и отсутствию эффекта Ааронова-Бома. Выяснено, какие особенности этих конфигураций ответственны за появление АБ-эффекта. Руководящую роль в этом анализе играют вопросы, связанные с однозначностью волновых функций.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

On the Single-Valuedness of Wave Functions in Multiply Connected Spaces

G.N.Afanasiev

The following three conditions are shown to be insufficient for the appearance of the Aharonov-Bohm effect: 1) multiconnectedness of the space accessible for the incident particles; 2) nontrivial curlless vector magnetic potential in this multiconnected region; 3) single-valuedness of the used wave functions. A counterexample is given in which in the same multiconnected space with nonzero vector magnetic potential and single-valued wave functions the Aharonov-Bohm effect may or may not exist. This fact depends on the specific configuration of the magnetic field. It is studied which of these peculiarities are responsible for the appearance of the Aharonov-Bohm effect. The single-valuedness of the wave functions plays a guiding role in this analysis.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Вопрос о том, только ли однозначные волновые функции допустимы в квантовой механике имеет давнюю историю. Известный критерий Паули [1] состоит в том, что допустимы только такие волновые функции, которые не выводятся за пределы гильбертова пространства при действии на них понижающих и повышающих операторов. Хорошее изложение этих вопросов можно найти в [2]. В последнее время вновь стал актуальным вопрос о соотношении между паулиевским критерием и однозначностью волновых функций в многосвязных пространствах. Дело в том, что эффект Ааронова-Бома /АБ/ возникает только тогда, когда используются однозначные волновые функции [3]. С другой стороны, в [4] было показано, что паулиевский критерий допустимости волновых функций приводит к отсутствию эффекта АБ для бесконечного цилиндрического соленоида.

Мы хотим выяснить роль требования однозначности волновых функций при описании процессов рассеяния в многосвязных пространствах. В частности, мы попытаемся ответить на вопрос, обязано ли происхождение эффекта АБ только многосвязности пространства. Последняя, в свою очередь, возникает за счет удаления из всего пространства S той ее части S_0, в которой напряженность магнитного поля равна нулю /чтобы рассеяние частиц происходило только на областях пространства с $H=0$/. Этого можно достичь, если включить в S_0 бесконечно большой отталкивающий потенциал или же считать волновую функцию равной нулю на границе /и внутри/ S_0.

Рассмотрим сначала многосвязное пространство, полученное удалением из всего пространства, доступного для падающих частиц, бесконечной цилиндрической трубы C_0 радиуса b, внутри которой по предположению потенциал равен $+\infty$. Если ось симметрии этой трубы совпадает с осью z, а направление падающего пучка параллельно оси x, то волновая функция и амплитуда рассеяния на такой трубе /т.е. на потенциале, равном $+\infty$ внутри трубы и нулю - снаружи/ равны

$$\Psi_0 = \Sigma\, i^{|m|} \cdot [J_{|m|}(k\rho) - H^{(1)}_{|m|}(k\rho)\cdot \frac{J_{|m|}(kb)}{H^{(1)}_{|m|}(kb)}]\exp(im\phi),$$

$$f_0(\phi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi k i}}\ \Sigma\ \frac{J_{|m|}(kb)}{H^{(1)}_{|m|}(kb)}\ \exp(im\phi). \qquad /1/$$

Поместим теперь внутрь C_0 цилиндрический соленоид, соосный с C_0, с радиусом $a<b$. Вне соленоида только одна компонента векторного магнитного потенциала /ВМП/ отлична от нуля:

$A_\rho = A_z = 0$, $A_\phi = \frac{Ha^2}{2\rho} = \frac{\Phi}{2\pi\rho}$ /H - магнитное поле, Φ - его поток/.

Волновая функция и амплитуда рассеяния равны

$$\Psi = \Sigma\, i^{|m|} \cdot \exp[i\frac{\pi}{2}(|m| - |m-\gamma|)] \cdot [J_{|m-\gamma|}(k\rho) -$$

$$- H^{(1)}_{|m-\gamma|}(k\rho) \cdot \frac{J_{|m-\gamma|}(kb)}{H^{(1)}_{|m-\gamma|}(kb)}] \exp(im\phi), \quad (\gamma = \frac{e\Phi}{2\pi hc}), \qquad /2/$$

$$f(\phi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi ki}} \cdot \Sigma \exp(im\phi) \cdot [1 + (-1)^{|m|-|m-\gamma|} \cdot \frac{H^{(2)}_{|m-\gamma|}(kb)}{H^{(1)}_{|m-\gamma|}(kb)}].$$

Очевидно, что $f \neq f_0$, и именно это отличие и составляет суть эффекта АБ.

С другой стороны, уравнение Шредингера, которому удовлетворяет функция Ψ

$$-\frac{h^2}{2m}[\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial}{\partial\phi} - i\gamma)^2 \cdot \Psi] = E \cdot \Psi, \qquad /3/$$

формально допускает следующее решение:

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \exp(i\gamma\phi). \qquad /4/$$

Здесь Ψ_0 - решение уравнения Шредингера в отсутствие магнитного поля. Если в качестве Ψ_0 взять однозначное решение /1/, удовлетворяющее условию $\Psi_0(2\pi) = \Psi_0(0)$, то плотность вероятности $|\Psi|^2$ и плотность тока вероятности $\vec{j}$ для Ψ и Ψ_0 одинаковы, т.е. магнитное поле не дает вклада в рассеяние. С другой стороны, если Ψ в /4/ - однозначная функция, то Ψ_0 неоднозначна:

$$\Psi_0(2\pi) = \Psi_0(0) \cdot \exp(-2i\pi\gamma). \qquad /5/$$

Докажем, что волновые функции Ψ в /2/ и /4/ одни и те же. В самом деле, решение свободного уравнения Шредингера с граничным условием /5/ имеет вид

$$\Psi_0 = \Sigma\, A_m \cdot [J_{|m-\gamma|}(k\rho) - H^{(1)}_{|m-\gamma|}(k\rho) \cdot \frac{J_{|m-\gamma|}(kb)}{H^{(1)}_{|m-\gamma|}(kb)}] \cdot \exp[i(m-\gamma)\phi] \qquad /6/$$

Подставляем /6/ в /4/ и фиксируем A_m условием исчезновения сходящейся сферической волны при $\rho \to \infty$. Это доказывает совпадение волновых функций.

Заметим, что потенциалы A_i вне соленоида могут быть представлены в виде градиента функции $\alpha = \frac{\Phi\phi}{2\pi}$ /5/: $A_\rho = A_z = 0$, $A_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\alpha}{\partial\phi} = \frac{\Phi}{2\pi\rho}$. Поскольку ϕ испытывает скачок на 2π при переходе через положительную полуось x, это же относится и к "производящей" функции α. Эта разрывность приводит к тому, что интеграл по замкнутому контуру, содержащему начало координат:

$$\int A_\ell \, d\ell = \int \frac{1}{\rho}\frac{\partial\alpha}{\partial\phi}\rho\cdot d\phi = \alpha(2\pi) - \alpha(0) = \Phi,$$

т.е. равен потоку магнитного поля, что и следовало ожидать.

Поместим теперь внутрь C_0 конечный тороидальный соленоид /вместо бесконечного цилиндрического/: $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$. Производящая функция α для тороидального соленоида (т.е. функция, удовлетворяющая вне соленоида условию $A = \operatorname{grad}\alpha$) является непрерывной функцией тороидальных координат μ, θ, ϕ /6/. Цилиндрические координаты связаны с ними следующим образом:

$$\rho = a\frac{\operatorname{sh}\mu}{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}, \quad z = a\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}, \quad \phi = \phi \qquad /7/$$

$$(0 \le \mu \le \infty, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi).$$

Пусть соленоиду отвечает значение $\mu = \mu_0$. Тогда точки, отвечающие $\mu > \mu_0$ лежат внутри соленоида, а $\mu < \mu_0$ вне его. Параметры соленоида R, d следующим образом связаны с a, μ_0: $R = \frac{a}{\operatorname{sh}\mu_0}$, $d = a\cdot\operatorname{cth}\mu_0$. Из /7/ следует, что при $\rho < a$ близким значениям z, лежащим по разные стороны плоскости $z = 0$, отвечают значения θ, отличающиеся на 2π, т.е. θ как функция z испытывает скачок при переходе через плоскость экваториального круга радиуса a. Иными словами: для тороидального соленоида область разрыва производящей функции α /содержащей линейное по θ слагаемое/ представляет собой круг радиуса $d - R$, лежащий в экваториальной плоскости соленоида. Тогда функция

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \exp\left(\frac{ie\alpha}{hc}\right), \qquad /8/$$

где Ψ_0 дается выражением /1/, является однозначным и непрерывным решением уравнения Шредингера. В самом деле, область разрыва производящей функции α для соленоида лежит

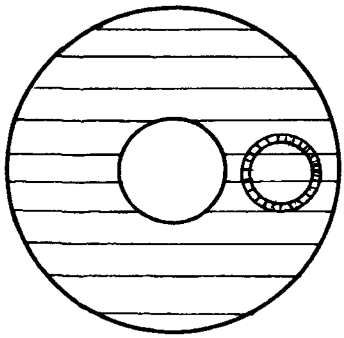


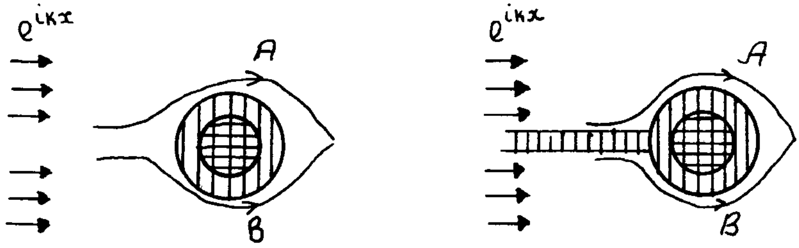
Рис.1. Иллюстрация того факта, что наличия безвихревых ВМП в многосвязных областях еще недостаточно для появления эффекта АВ. Крупной штриховкой показан непроницаемый тор, в который помещен соленоид /мелкая штриховка/. Доступное для рассеиваемых частиц пространство многосвязно и в нем ВМП отличны от нуля.

внутри цилиндра, т.е. там, где $\Psi_0 = 0$. В этом случае магнитное поле не дает вклада в амплитуду рассеяния, т.е. эффект АБ отсутствует при любой ориентации соленоида.

Мы видим, что для одного и того же многосвязного пространства эффект АБ может быть, но может и отсутствовать.

Приведем еще один пример многосвязного пространства, для которого отсутствует эффект АБ. Именно рассмотрим непроницаемый тор T_0, в одно из плеч которого помещен тороидальный соленоид /рис.1/. Как и в предыдущем случае, сингулярности производящей функции соленоида лежат в области, где $\Psi_0 = 0$. Поэтому выражение типа /8/, где Ψ_0 - волновая функция рассеяния на непроницаемом торе, является однозначным и непрерывным решением уравнения Шредингера с ВМП тороидального соленоида.

Итак, существование или отсутствие эффекта АБ определяется не только фактом многосвязности пространства, но и специфической конфигурацией магнитного поля. Что за отличие в этих конфигурациях приводит к появлению эффекта АБ? Мы замечаем, что в рассмотренных примерах многосвязных областей эффект АБ отсутствует, если разрыв функции a происходит в недоступной для частиц области, т.е. там, где $\Psi_0 = 0$ /тороидальный соленоид в бесконечном цилиндре, в торе/. В противном случае /цилиндрический соленоид в цилиндре/ эффект имеет место. Этот аргумент, однако, повисает в воздухе, если заметить, что интервал изменения θ в /7/ может быть выбран $(0, 2\pi)$. В этом случае область разрывности функции a заполняет часть экваториальной плоскости, отвечающей $\rho > d + R$, т.е. имеется перекрытие с областью пространства, где $\Psi_0 \neq 0$. Возможно, более точная формулировка состоит в следующем. Эффект АБ отсутствует, если удастся каким-либо образом "загнать" сингулярности функции a в область, где $\Psi_0 = 0$. Ввиду однозначности и непрерывности самих ВМП эффект АБ будет отсутствовать также при любом ином выборе области разрыва. Отметим также, что



а   б

Рис.2. Иллюстрация того факта, что наличия путей А и В, вдоль которых фаза меняется на $\pm\frac{e\Phi}{2\hbar c}$, еще не достаточно для возникновения эффекта АБ. Вертикальной штриховкой показаны области, где $V_0=\infty$, $\Psi_0=0$. Горизонтальной штриховкой показан соленоид. Таким образом, область, доступная для частиц, многосвязна на рис.2а и односвязна на рис.2б. Соответственно этому эффект АБ имеется в первом случае и отсутствует во втором.

обычное рассуждение о том, что эффект АБ является следствием появления у волновой функции разных фаз при обходе области, содержащей магнитное поле, по разным путям /А,В на рис.2а/, не совсем верно из-за однозначности волновой функции. В качестве иллюстрации рассмотрим односвязную область, полученную удалением из всего пространства области, заштрихованной на рис.2б /т.е. $V_0=\infty$ внутри заштрихованной области/. Поскольку линию сингулярностей можно всегда совместить с заштрихованной полосой, то справедливо выражение $\Psi=\Psi_0\cdot\exp(i\gamma\phi)$, $(-\pi<\phi<\pi)$, где Ψ_0 - однозначная и непрерывная функция, обращающаяся в нуль внутри заштрихованной полосы. Ввиду унитарности этого преобразования магнитное поле не дает вклада в амплитуду рассеяния, т.е. эффекта АВ нет, хотя разность фаз та же, что и в предыдущем случае.

Отметим также отличие физических величин, отвечающих однозначным и многозначным волновым функциям. Например, двумерному уравнению Шредингера с потенциалом $\sim\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ отвечают следующие волновые функции и уровни энергии:

$$\Psi_{n,m}\sim\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\cdot y^{m+\gamma}\,L_n^{2m+1\gamma}(y)\cdot\exp[i(m+\gamma)\phi],$$

$$E_{n,m}\sim\frac{1}{(2n+2m+2\gamma+1)^2},\quad (y=2k\rho).$$

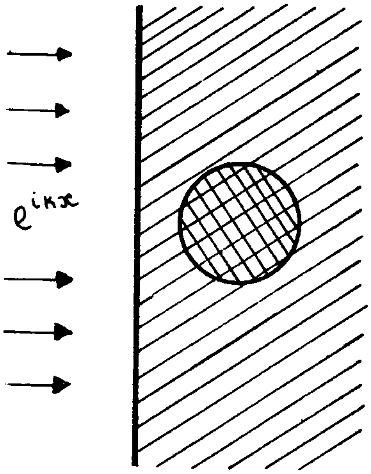


Рис.3. Иллюстрирует отсутствие эффекта АБ в односвязном пространстве. Справа от жирной вертикальной линии заштрихована область бесконечного отталкивания. В ней же расположен соленоид /двойная штриховка/. Доступная для частиц односвязная область лежит левее вертикальной линии.

Очевидно, что как уровни энергии, так и распределение вероятности $|\Psi|^2$, среднеквадратический радиус $<\rho^2>$ явно зависят от параметра неоднозначности γ.

Интересно проследить на конкретном примере, как переход от многосвязного пространства к односвязному приводит к исчезновению эффекта АБ. Рассмотрим опять-таки рассеяние заряженных частиц бесконечным цилиндрическим соленоидом, но теперь при $x > -a$ имеется бесконечное отталкивание /рис.3/. Таким образом, $\Psi_0 = 0$ при $x > -a$. Если магнитное поле выключено, то волновая функция равна $\Psi_0 = \sin k(x+a)$ при $x < -a$ и нулю при $x > -a$. После того как магнитное поле включено, имеем:

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \exp(i\gamma\phi), \quad (0 < \phi < 2\pi). \qquad /9/$$

Поскольку область разрыва /представляющая собой полуплоскость $y = 0$, $x > 0$/ лежит там, где $\Psi_0 = 0$, то /9/ - однозначное и непрерывное решение уравнения Шредингера при наличии магнитного поля. Ввиду унитарности преобразования /9/ эффект АБ отсутствует. Физический результат не должен зависеть от выбора направления плоскости разрыва производящей функции α. В частности, при изменении азимутального угла в интервале $(-\pi, \pi)$ плоскость разрыва совпадает с отрицательной полуплоскостью $y = 0$, $x < 0$. В этом случае формула /9/ для Ψ справедлива, но Ψ_0 - многозначная функция: $\Psi_0(-\pi) = \Psi_0(\pi) \cdot \exp(2i\gamma\pi)$. Все же желательно иметь непосредственное доказательство отсутствия вклада магнитного поля в амплитуду рассеяния, которое не опирается на выражение /9/. Ограничимся первым порядком теории возмущений. Тогда необходимо найти решение неоднородного уравнения

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = \frac{2i\gamma}{\rho^2}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\phi}, \quad (\Psi_0 = \sin k(x+a)). \qquad /10/$$

Оно выглядит следующим образом:

$$\Psi = \sin k(x+a) + 2i\gamma \int G_0(\vec{\rho}, \vec{\rho}\,')\frac{1}{\rho'^2}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\phi'}dx'dy'. \qquad /11/$$

Функция Грина G_0, удовлетворяющая правильному граничному условию / $G_0 = 0$, если x или x' равны - a /, легко строится с помощью метода инверсии /7/:

$$G_0 = \frac{1}{4i}\,[H_0^{(1)}(kR_1) - H_0^{(1)}(kR_2)],$$

где

$$R_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x+x'+2a)^2 + (y-y')^2}.$$

Наконец, устремляя в /11/ во втором слагаемом $\rho\to\infty$, находим амплитуду рассеяния

$$f(\phi) = -2i\gamma k\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi k i}}\int_{-\infty}^{-a}dx'\int_{-\infty}^{\infty}dy'\cdot\{\exp[-ik(x'\cdot\cos\phi + y'\sin\phi)] -$$

$$-\exp[ik((x'+2a)\cos\phi - y'\sin\phi)]\}\cos k(x'+a)\cdot\frac{y'}{x'^2 + y'^2}. \qquad /12/$$

Интегрируя по y' и делая замену переменных $x'\to -x'-a$ получаем

$$f(\phi) = 4\gamma k\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi i k}}\,e^{ika\cos\phi}\,(-i\pi\cdot\mathrm{sgn}\,\phi)\cdot\int_0^{\infty}e^{-kx|\sin\phi|}\times$$

$$\times\sin(kx\cos\phi)\cos kx\,dx.$$

Легко убедиться, что этот интеграл равен нулю везде, за исключением $\phi = \pm\pi$. Для таких значений ϕ переход от /12/ к /13/ неправомерен. Поэтому снова обращаемся к /12/. Подставляя значения $\phi = \pm\pi$, убеждаемся, что подынтегральное выражение в /12/ становится при этом нечетной функцией y', что и доказывает равенство $f(\phi)$ нулю.

Наблюдающийся в настоящее время поток статей по интерпретации эффекта АБ в значительной мере обязан работам [8], в которых делался неверный, на наш взгляд, вывод, что этот эффект не существует, являясь математической фикцией. Попытаемся разобраться в сути спора. В чем состоит эффект АБ? Это рассеяние на безвихревых ВМП в многосвязном пространстве /мы видели, что это необходимо, но недостаточно/. В многосвязных пространствах существуют неэквивалентные неприводимые представления углового момента, приводящие к физически различным результатам [9]. Отсутствие надежного критерия отбора того или иного представления и породило упомянутую дискуссию. Эффект АБ возникает только для неприводимого представления, соответствующего однозначной волновой функции. В односвязных пространствах эффект АБ отсутствует, так как с помощью подходящего градиентного преобразования ВМП можно обратить в нуль. В многосвязных пространствах подобная процедура приводит к появлению сингулярного магнитного поля на оси соленоида, в результате чего получается задача, физически неэквивалентная исходной [10].

С другой стороны, реальное физическое пространство, в котором проводится опыт, односвязно, так как любой реальный цилиндрический соленоид имеет конечные размеры, а потенциальный барьер - конечную высоту. Нет областей абсолютно недоступных для падающих частиц, любой контур может быть стянут в точку. Ввиду того, что в односвязных пространствах эффект АБ отсутствует, предпринимались попытки объяснить ненулевой результат опытов по обнаружению эффекта АБ "хвостами" магнитного поля в доступной для частиц области [11]. Ситуация стала еще более запутанной после появления работы Роя [12], в которой было показано, что если ВМП удовлетворяют определенным условиям, то рассеяние определяется магнитным полем H в доступных для частиц областях пространства. Этим условиям удовлетворяет конечный цилиндрический соленоид. Последовавшая дискуссия [13] не привела к полной ясности. Мы считаем, что многосвязное пространство /соответствующее бесконечному непроницаемому соленоиду/ является неплохой моделью реального односвязного пространства /конечный соленоид/ при условии, что первое является предельным случаем второго при неограниченном увеличении длины соленоида и высоты потенциального барьера. Это отбирает из всей совокупности неэквивалентных представлений одно, соответствующее однозначной волновой функции.

Автор благодарен Я.А.Смородинскому, беседы с которым способствовали пониманию многих вопросов, рассмотренных в данной работе.

Литература

1. Pauli W. Helv.Phys.Acta, 1939, 12, p. 147; русский перевод в кн.: Паули В. Труды по квантовой механике /под ред. Я.А.Смородинского/, "Наука", М., 1977, с. 294-314.
2. Merzbacher E. Amer.J.Phys., 1962, 30, p. 237; Pandres D. J.Math.Phys., 1962, 3, p. 305; Kretzschmar M. Z.Phys., 1956, 185, p. 73.
3. Bohm D., Hiley D.J. Nuovo Cim., 1979, 52A, p. 295; Rothe H.J. Nuovo Cim., 1981, 62A, p. 54; Berry M.V. Eur. J.Phys., 1980, 1, p. 240; Yang C.N. In: Proc. Int.Symp. Foundations of Quantum Mechanics, pp.5-9, Tokyo, 1983; Aharonov Y. ibid. pp.10-19.
4. Henneberger W.C. J.Math.Phys., 1980, 22, p. 116; Roy S.M., Singh V. Nuovo Cim., 1984, 79A, p. 391.
5. Bohm D., Kaye R.D., Philippidis C. Nuovo Cim., 1982, 71B, p. 75; Rothe H.J. Nuovo Cim., 1981, 62A, p. 54; Ruijsenaars S.N.M., Ann.Phys., (N.Y.), 1983, 146, p.1.
6. Afanasiev G.N. JINR, E4-84-65, Dubna, 1984.
7. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. ИЛ, М., 1958, т.1.
8. Bocchieri P.,Loinger A. Nuovo Cim., 1978, 47A, p.475; Bocchieri P., Loinger A., Siragusa G. ibid., 1979, 51A, p. 1; Bocchieri P., Loinger A. ibid. 1981, 66A, p. 164; Bocchieri P., Loinger A. Lett. Nuovo Cim., 1982, 35, p. 469; Bocchieri P., Loinger A. ibid., 1984, 39, p. 148.
9. Goldin G.A., Menikoff R., Sharp D.H. J.Math.Phys., 1981, 22, p. 1664; Henneberger W.C. ibid., p. 116; Roy S.M., Singh V. Nuovo Cim., 1984, 79A, p. 391.
10. Mignaco J.A., Novaes C.A. Lett.Nuovo Cim., 1979, 26, p. 453.
11. Strocchi F., Wightman A.S. J.Math.Phys., 1974, 15, p. 2198; Casati G., Guarneri I. Phys.Rev.Lett., 1979, 42, p. 1579; Home D., Sengupta S. Am.J.Phys., 1983, 51, p. 942.
12. Roy S.M. Phys.Rev.Lett., 1980, 44, p. 111.
13. Greenberger D.M. Phys.Rev.D, 1981, 23, p. 1460; Klein U. ibid. p. 1463; Lipkin H.J. ibid, p. 1466.

Рукопись поступила 4 января 1985 года.